非合作二人零和博弈模型及理论现状调研

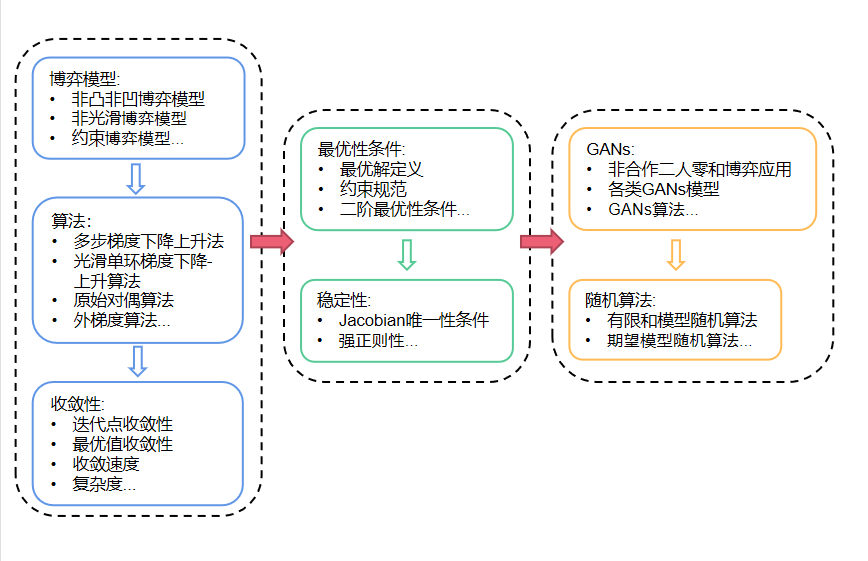
1. 研究思路

在FKFD体系的研究中，随着信息时代中数据规模迅速膨胀，大数据下复杂环境的对抗博弈的战略决策成为目前军事战争中迫在眉睫的研究课题。由于战争态势具有环境高复杂，信息不完整、不确定以及对手决策不可预见的特点，人工智能在军事中的应用仍然处于摸索阶段。而这些特点在FKFD领域尤为突出，由于对手的饱和攻击、超低空突防、隐身、电磁干扰等对抗手段在战争中的广泛应用，使得FKFD作战的博弈对抗中存在体系的高复杂性、空间的高机动性、时间的高实时性等特点，需要发展智能化FKFD的指控和博弈理论体系。

以往在FKFD体系中博弈决策制定还停留在以指挥官的经验为主导，以传统博弈论原理为辅的层面。然而，在现今错综复杂的战争局势中，指挥官依据经验往往无法处理庞大的信息网，准确预测对手决策，传统博弈理论也无法解决高动态环境下的博弈策略制定。因此发展智能FKFD体系的博弈对抗理论至关重要。

在众多博弈模型中，有三类典型的博弈模型适用于解决多种类型武器协同智能作战模型和跨域空间一体化智能作战模型。非合作二人零和博弈模型主要基于Nash均衡与广义Nash均衡理论，其用于有效地解决强对抗博弈环境下，决策者为最大化己方利益制定最优决策的优化问题。随着深度学习在各类工业领域中的广泛应用，基于工业技术和计算机系统安全性考量，为了提升智能化学习系统的对抗鲁棒性(抵御对抗的能力)并改善强化学习中脆弱、判错率高的缺点，2014年，Goodfellow等人在机器学习的顶级会议Neural Information Processing Systems上发表了关于对抗学习中的生成对抗网络的研究，引起了计算机科学、统计学、金融和工程等领域学者的广泛关注。作为对抗学习的重要模型之一，非合作二人零和博弈理论可以为人工智能，工程控制，生物医学等领域内的问题建立更优的解决方案。目前在FKFD体系中，大量的研究主要集中在武器配置和杀伤链构建等传统优化模型理论的研究，然而对抗学习理论的研究还处于起步阶段。与传统优化模型不同，非合作二人零和博弈模型主要解决智能化的提升FKFD体系中对抗鲁棒性，并扭转高复杂环境下与对手对抗博弈问题中高动态变化的战争局势。因此，从非合作二人零和博弈模型及理论研究现状出发，已有的非合作二人零和博弈模型以及高效算法可为强对抗战争下的FKFD防御策略提供理论支撑，并通过对抗学习自主地提升FKFD作战的防御能力以及各系统的协调能力。基于这一观点，我们将对非合作二人零和博弈模型及理论研究现状展开调研，形成调研报告。

本项目的调研报告主要分为三个方面，包括：非合作二人零和博弈模型、算法及收敛与稳定性理论。首先，针对具有不同性质的非合作二人零和博弈模型，总结已有学术论文中提出的高效算法，并概括算法的收敛性结果。其次，针对变化高动态的博弈场景，非合作二人零和博弈模型的稳定性研究目前已有一定的理论突破。我们将重点介绍具有非线性约束优化的非合作二人零和博弈的稳定性研究成果。最后，针对大数据环境下的博弈对抗问题，梳理对抗学习在非合作二人零和博弈的应用以及发展进程，并总结高效的随机算法。具体研究路线图见下图。



1. 研究方案

作为一个经典的博弈问题，非合作二人零和博弈问题在数学、经济学和计算机科学领域受到了广泛关注。最近，对于约束简单且可分的光滑非合作二人零和博弈问题已广泛用于解决各种问题，例如生成对抗网络 (GAN) [1]、对抗学习 [2]、最优传输问题 [3] 和分布式计算 [4]等。然而，在机器学习，几何图像工程，统计学等领域内的大部分问题是复杂约束结构甚至不可分约束的非合作二人零和博弈问题, 例如: 耦合生成对抗网络 (Coupled Generative Adversarial Networks) [5]、绝对值方程 (Generalized Absolute Value Equations ) [6]、线性回归 (Linear Regression ) [7]。

目前，针对不可分约束非合作二人零和博弈问题的数值算法鲜有研究。其难点主要体现在四个方面。第一，目标函数中的可能具有非凸非凹结构，即同时关于是非凸，关于是非凹。寻找问题的全局非合作二人零和博弈点是NP-难问题。由于最优性条件保证算法收敛到问题的一阶稳定点，利用求解凸凹问题的数值算法(例如: 梯度上升下降方法[8]) 可能收敛到问题的局部极大极大点，非局部极小极大点。因此需要开发新的稳定的数值算法求解非凸非凹的问题。第二，目标函数中的可能是非光滑的，即关于以及关于是不可微的。依赖梯度的梯度下降方法、外梯度方法并不适用于解决问题。利用非光滑分析的工具解决非光滑非合作二人零和博弈问题也成为研究重点。第三，问题的约束函数可能是不可分离的，即的可行域与的可行域是相互影响的。由于变量间具有相关性且约束结构复杂，无法用传统的投影梯度方法或惩罚函数方法求解，因此对于不可分约束的问题开发高效算法是重要的研究内容。第四，模型中目标函数和约束函数无法精确计算或计算需要消耗巨大的时间成本。面对约束二人零和博弈模型(P), 传统的确定性算法是无法快速且准确的计算最优解。所以，设计随机算法求解非合作二人零和博弈模型是必要的。

在如今信息爆炸的年代，机器学习，统计等领域内的问题需要处理大规模的数据集，这导致相关的非合作二人零和博弈模型的规模庞大，结构复杂。因此，目前针对非合作二人零和博弈问题的高效算法都是基于梯度的一阶算法[9-10]。在近二十年里，有关非合作二人零和博弈问题的算法研究取得了丰硕的成果，本项目将结合非凸非凹非合作二人零和博弈问题算法、非光滑非合作二人零和博弈问题算法、约束非合作二人零和博弈问题算法、约束非合作二人零和博弈问题的稳定性、非合作二人零和博弈问题的随机算法的研究形成调研报告。

1. 非凸非凹非合作二人零和博弈问题算法研究

* Arjovsky et al. (2017) [11]提出用于解决对抗学习中模式崩溃的情况的Wasserstein 生成对抗网络 (WGAN)以及新算法。不同于传统的生成对抗网络，具有光滑非凸凹结构的WGAN能更稳定地用于求解机器学习中的图像生成问题。
* 对于是具有非凸非凹结构的光滑非合作二人零和博弈问题，Sanjabi et al. (2018) [12] 提出了一种多步梯度下降上升法，并证明当变量满足 Polyak-Lojasiewicz (PL)条件时，算法可以在 O( log ) 次迭代内找到 -一阶稳定点。
* 对于是具有非凸凹结构的光滑非合作二人零和博弈问题，Zhang et al. (2020) [13] 提出了一种光滑单环梯度下降-上升(GDA) 算法并证明了算法具有的迭代复杂度。他们还将这种稳定的 GDA 算法扩展到多块的非凸-凹极小极大问题。进一步， Xu et al. (2020) [14] 提出了一致单环交替梯度投影(AGP)算法用于解决非凸-凹和凸-非凹光滑非合作二人零和博弈问题并建立了的迭代复杂度。

1. 非光滑非合作二人零和博弈问题算法研究

* 对于是双线性函数的非光滑非合作二人零和博弈问题，Chambolle and Pock (2011) [15] 提出了一种一阶原始对偶算法并建立了算法的收敛性。 后来，Chambolle and Pock (2016) [16] 中证明了原始对偶算法的遍历收敛速度，并在 [17] 中讨论了加速原始对偶算法的收敛速度。
* 对于非光滑凸凹非合作二人零和博弈问题， Valkonen (2014) [18] 给出了一种改进的原始对偶混合梯度方法，它是 [15] 中原始对偶方法的扩展。 此外，按照 [15] 的思路，Clason et al. (2021) [19] 提出了一种原始对偶邻近分裂(PDPS)方法，并且在 梯度有界且Lipschitz连续的条件下，证明了PDPS 的收敛性。最近，Hamedani and Aybat (2021) [20] 针对非光滑凸凹问题提出了一种原始对偶算法，并证明了算法的遍历收敛速度为。

1. 约束非合作二人零和博弈问题研究

* 对于是双线性函数，是光滑非线性函数，，且约束为的非合作二人零和博弈问题，其中是紧致凸集，Nemirovski (2004) [21]提出了镜像邻近算法并证明了该方法可以在次迭代中找到此类问题的极小极大点。进一步，对于也是光滑的非线性函数的非合作二人零和博弈问题， Chen et al. (2014) [22] 提出了一种新的加速原始对偶 (APD) 方法，并表明APD方法具有与[10]中算法相同的收敛速度。
* 对于约束为的光滑凸凹非合作二人零和博弈问题，Mokhtari et al. (2019) [23] 给出了解决该问题的算法。该算法的收敛性分析可以统一地用于分析经典邻近点方法的逼近方法的收敛性。进一步，针对基于邻近点方法的乐观梯度法和外梯度方法，Mokhtari et al. (2019) [24]证明了这两种方法对于这类非合作二人零和博弈问题的收敛速度为 。
* 对于约束为的光滑非凸非凹非合作二人零和博弈问题，Nouiehed et al. (2019) [25]提出了一种多步梯度下降上升法，并证明当变量满足 Polyak-Lojasiewicz (PL)条件时，算法可以得到了与[12]相同的迭代复杂度。
* 对于约束为的非光滑非凸强凹非合作二人零和博弈问题，Luo et al. (2020) [26]提出了一种镜像下降上升(MDA)方法并建立了算法的迭代复杂度。进一步，对于这类约束非光滑非凸非凹非合作二人零和博弈问题，Pethick et al. (2021) [27]提出了一种自适应步长的外梯度算法并当弱 Minty 不等式 (MVI) 成立时，证明了算法生成的迭代点的收敛性。

1. 约束非合作二人零和博弈问题的稳定性研究

* 关于这类非合作二人零和博弈问题的最优性条件以及稳定性分析有一些开创性结果[28-31]。约束非合作二人零和博弈问题的二阶充分性条件、Jacobian 唯一性定理、强正则性等稳定性结论对于随机算法的收敛性起着至关重要的作用。本项目将梳理这类问题的稳定性结论。

1. 非合作二人零和博弈问题的随机算法研究

* 随着对抗学习在强对抗环境下智能自主进化博弈对手能力的兴起，各种类型的生成对抗网络以及对应的随机算法应运而生。本项目将从2014年的Goodfellow等人的GANs出发，梳理目前已有文献对生成对抗网络的研究。
* 在已有的关于随机算法的学习和研究工作中，由于随机算法中生成的近似函数值和近似梯度存在随机性, 可能导致错误的迭代步骤, 从而使下一次迭代的目标值任意偏离当前迭代，导致随机算法不具备良好的收敛性。因此在随机算法中设计近似函数值和近似梯度的生成方式尤为重要。目前已有针对二人零和博弈问题的随机算法需要假设利用随机oracles生成无偏的近似函数值和近似梯度。因此，本项目将总结大规模数据集下的非合作二人零和博弈问题的各类算法。

参考文献

[1] Goodfellow I., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. Generative adversarial networks. Communications of The ACM, 63(11), 139-144, 2020.

[2] Tu Z., Zhang J., Tao D.: Theoretical analysis of adversarial learning: A minimax approach. In Advances in Neural Information Processing Systems, 32, 12280-12290, 2019.

[3] Xie Y., Chen M., Jiang H., Zhao T., Zha H.: On scalable and efficient computation of large scale optimal transport. In International Conference on Machine Learning, 6882-6892, 2019.

[4] Krause A., Leskovec J., Guestrin C., VanBriesen J., Faloutsos C.: Efficient sensor placement optimization for securing large water distribution networks. J. Water Res. Plan. Man., 134(6), 516-526, 2008.

[5] Wang J., Jiang J.: Conditional coupled generative adversarial networks for zero-shot domain adaptation. In Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (pp. 3375-3384), 2019.

[6] Mangasarian O. L.: Linear complementarity as absolute value equation solution. Optim. Lett., 8(4), 1529-1534, 2014.

[7] Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S.: A unified analysis of extra-gradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: Proximal point approach. International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. 1497-1507, 2020.

[8] Nemirovski A.: Prox-method with rate of convergence o(1/t) for variational inequalities with lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. SIAM J. Optimiz. 15(1), 229–251, 2004.

[9] Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H.: Studies in linear and non-linear programming. Am. Math. Mon. 67(2), 1958.

[10] Nesterov Y.: Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. Math. Program. 109(2-3), 319–344, 2007.

[11] Arjovsky M., Chintala S., Bottou L.: Wasserstein generative adversarial networks. In International conference on machine learning. pp. 214-223, 2017, July.

[12] Sanjabi M., Razaviyayn M., Lee J.D.: Solving non-convex non-concave min-max games under polyak- lojasiewicz condition, 2018, https://arxiv.org/abs/1812.02878v1.

[13] Zhang J.W., Xiao P.J., Sun R.Y., Luo Z.Q.: A single-loop smoothed gradient descent-ascent algorithm for nonconvex-concave min-max problems, 2020. https://arxiv.org/abs/2010.15768v1.

[14] Xu Z., Zhang H.L., Xu Y., Lan G.H.: A unifified single-loop alternating gradient projection algorithm for nonconvex-concave and convex-nonconcave minimax problems, 2020. https://arxiv.org/abs/2006.02032v1.

[15] Chambolle A., Pock T.: A fifirst-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. J. Math. Imaging Vis. 40, 120-145, 2011.

[16] Chambolle A., Pock T.: On the ergodic convergence rates of a first-order primal-dual algorithm. Math. Program. Ser. A. 159, 253-287, 2016.

[17] Chambolle A., Pock T.: An introduction to continuous optimization for imaging. Acta Numer., 25, 161-319, 2016.

[18] Valkonen T.: A primal-dual hybrid gradient method for nonlinear operators with applications to MRI. Inverse Probl. 30(5): 055012, 2014.

[19] Clason C., Mazurenko S., Valkonen T.: Primal-dual proximal splitting and generalized conjugation in non-smooth non-convex optimization. Appl. Math. Opt. 84(2), 1239-1284, 2021.

[20] Hamedani, E. Y., Aybat, N. S.: A primal-dual algorithm with line search for general convex-concave saddle point problems. SIAM J. Optimiz. 31(2), 1299-1329, 2021.

[21] Nemirovski A.: Prox-method with rate of convergence o(1/t) for variational inequalities with lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. SIAM J. Optimiz. 15(1), 229–251, 2004.

[22] Chen Y., Lan G., Ouyang Y.: Optimal primal-dual methods for a class of saddle point problems. SIAM J. Optimiz. 24(4), 1779–1814, 2014.

[23] Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S.: A unified analysis of extragradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: proximal point approach, 2019, https://arxiv.org/abs/1901.08511v4.

[24} Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S.: Proximal point approximations achieving a convergence rate of o(1/k) for smooth convex-concave saddle point problems: optimistic gradient and extra-gradient methods, 2019, https://arxiv.org/abs/1906.01115v1.

[25] Nouiehed M., Sanjabi M., Huang T.J., Lee J.D., Razaviyayn M.: Solving a class of non-convex min-max games using iterative first order methods, 2019, https://arxiv.org/abs/1902.08297v3.

[26] Luo L., Ye H., Huang Z., Zhang T.: Stochastic recursive gradient descent ascent for stochastic nonconvex-strongly-concave minimax problems. Advances in Neural Information Processing Systems, 33, 20566-20577, 2020.

[27] Pethick T., Latafat P., Patrinos P., Fercoq O., Cevher V.: Escaping limit cycles: Global convergence for constrained nonconvex-nonconcave minimax problems. In International Conference on Learning Representations, 2021, September.

[28] Dai Y.H., Zhang L.W.: Optimality conditions for constrained minimax optimization. CSIAM Transactions on Applied Mathematics, 1 (2): 296-315, 2020.

[29] Dai Y. H., Zhang L.: Stability for Constrained Minimax Optimization, 2021, https://arxiv.org/abs/2111.05680.

[30] Zhong L. N., Jin Y. F.: Optimality conditions for minimax optimization problems with an infinite number of constraints and related applications. Acta Math. Appl. Sin-E., 37(2), 251-263, 2021.

[31] Aquino P.G.P., de Pinho M.D.R., Silva G.N.: Necessary optimality conditions for minimax optimal control problems with mixed constraints. ESAIM Contr. Optim. Ca., 27-72, 2021.